. Classe de **T.ES**
. Nombre d'élèves : 29
. Enseignant : Patrice Lalevée

version 1.2

EE.03 (DS)
BACCALAURÉAT BLANC

Vendredi 18 octobre 2019

13h30-16h30

MATHÉMATIQUES - T.ES
ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3 heures

Ce sujet comporte cinq pages numérotées de 1 à 5

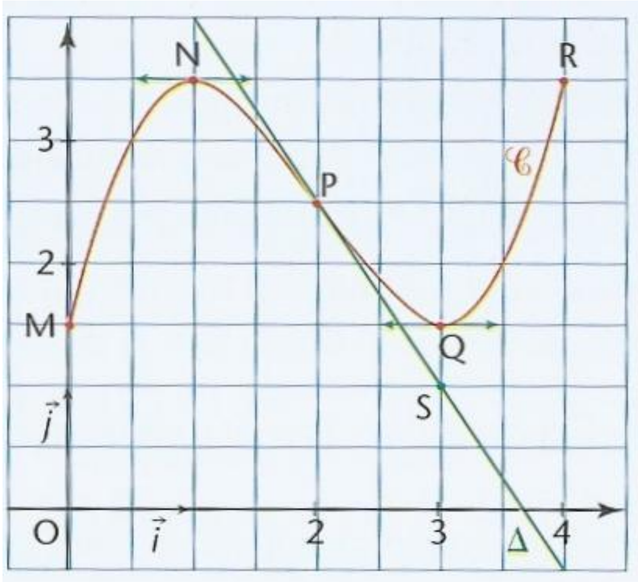
L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Exercice 1 (3 points)

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 4]$ dont la représentation graphique, dans un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$, est la courbe $\mathscr{C}$ ci-contre.



. Les points M , N , P , Q et R appartiennent à la courbe $\mathscr{C}$.

. La courbe $\mathscr{C}$ admet en chacun des points N et Q une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

. Le point S a des coordonnées entières et est tel que la droite (PS) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point P .

. Le point P est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$.

Répondre aux questions suivantes, **sans justification** :

1) donner $f\left(\frac{7}{2}\right)$;

2) donner les solutions de l'équation $f(x)=\frac{7}{2}$;

3) dresser le tableau de variation de f sur $[0\ ;\ 4]$;

4) donner les extrema de la fonction f sur $[0\ ;\ 4]$;

5) donner l'ensemble des nombres qui n'ont pas d'antécédent par f ;

6) donner les solutions de l'inéquation $f(x)>\frac{3}{2}$;

7) donner $f'(2)$;

8) donner les solutions de l'équation $f'(x)=0$;

9) donner la convexité de f sur $[0\ ;\ 4]$.

Exercice 2 (6 points)

Partie A

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = u_n + 0,4 \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 8 \\ v_{n+1} = 1,028\ v_n \end{cases}$

1. a) Calculer u_1 et u_2.

b) Montrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

c) Expliquer pourquoi la suite (u_n) est strictement croissante.

d) Donner la forme explicite de la suite (u_n).

e) Déterminer la valeur approchée au millième de u_{10}.

2. a) Calculer v_1 et v_2.

b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

c) Expliquer pourquoi la suite (v_n) est strictement croissante.

d) Donner la forme explicite de la suite (v_n).

e) Déterminer la valeur approchée au millième de v_{10}.

3. On donne l'algorithme suivant dans lequel n est un entier naturel, et U et V sont des réels qui désignent respectivement les termes de rang n des suites (u_n) et (v_n) :

```
n ← 0
U ← 10
V ← 8
Tant que U > V
    U ← U + 0,4
    V ← V × 1,028
    n ← n + 1
Fin Tant que
```

En sortie de cet algorithme, n a pour valeur 46.
Interpréter ce résultat.

Partie B

En 1798, l'économiste anglais Thomas Malthus publie « An essay on the principle of population » dans lequel il émet l'hypothèse que l'accroissement de la population, beaucoup plus rapide que celui des ressources alimentaires, conduira son pays à la famine. Il écrit :

> « Nous pouvons donc tenir pour certain que, lorsque la population n'est arrêtée par aucun obstacle, elle va doublant tous les vingt-cinq ans, et croît de période en période selon une progression géométrique. [. . .] Nous sommes donc en état de prononcer, en partant de l'état actuel de la terre habitée, que les moyens de subsistance, dans les circonstances les plus favorables de l'industrie, ne peuvent jamais augmenter plus rapidement que selon une progression arithmétique. »

En 1800, la population de l'Angleterre était estimée à 8 millions d'habitants et l'agriculture anglaise pouvait nourrir 10 millions de personnes. Le modèle de Malthus admet que la population augmente de 2,8 % chaque année et que les progrès de l'agriculture permettent de nourrir 0,4 million de personnes de plus chaque année.

On utilisera ce modèle, ainsi que les résultats de la **partie A** pour répondre aux questions suivantes.

a) Quelle aurait été, en millions d'habitants, la population de l'Angleterre en 1810 ?

b) À l'aide de la calculatrice, conjecturer à partir de quelle année la population de l'Angleterre aurait dépassé 16 millions d'habitants ?

c) À partir de quelle année la population de l'Angleterre serait -elle devenue trop grande pour ne plus être suffisamment nourrie par son agriculture ?

Exercice 3 (4 points)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 200 \\ u_{n+1} = 1,2\, u_n - 10 \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. a) Calculer u_1 et u_2 .

b) Montrer que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. À l'aide de la calculatrice, conjecturer :

a) le sens de variation de la suite (u_n) ;

b) la limite de la suite (u_n).

3. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 50$.

a) Montrer que $v_0 = 150$

b) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

c) Exprimer v_n en fonction de n .

d) En déduire que pour tout entier naturel n : $u_n = 50 + 150 \times 1,2^n$.

4. a) Calculer le 50ème terme de la suite (u_n) .

b) ***question bonus***
Calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 (7 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[\,4\,;8\,]$ par :

$$f(x)=\frac{x^2-14x+49}{x-3}$$

1. a) Étudier le signe de $x^2-14x+49$ sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que $f(x)\geq 0$ pour tout réel x de $[\,4\,;8\,]$.

2. Calculer $f(4)$, $f(7)$ et $f(8)$ *(détailler les calculs)*.

3. a) Calculer $f'(x)$ où f' est la dérivée de f sur $[\,4\,;8\,]$.

b) Étudier le signe de x^2-6x-7 sur $\mathbb{R}$.
En déduire que $f'(x)<0$ si et seulement si x appartient à $[\,4\,;7\,[$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[\,4\,;8\,]$.

d) Déterminer les extrema de la fonction f sur $[\,4\,;8\,]$.
Retrouver alors le résultat de la question **1.**b).

4. a) Montrer que pour tout réel x de $[\,4\,;8\,]$, $f''(x)=\dfrac{32}{(x-3)^3}$.

b) En déduire la convexité de f sur $[\,4\,;8\,]$.

5. a) Montrer que l'équation $f(x)=2$ a une unique solution sur $[\,4\,;7\,]$.

b) En déduire que l'équation $f(x)=2$ a une unique solution sur $[\,4\,;8\,]$.

c) Soit α l'unique solution de l'équation $f(x)=2$ sur $[\,4\,;8\,]$.

. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de α arrondie à 0,001 près.

. Quelle conjecture peut-on émettre sur la valeur de α ? La démontrer.