ARCHIVES MATHS DE T$^{\text{ère}}$ ES

DA.03

Durée : 3 heures - Calculatrice interdite

ÉNONCÉ
et CORRIGÉ

Thèmes : Suites - CTVI - Convexité
Fonctions – Lecture graphique –
Signe - Nombre dérivé - Extrema

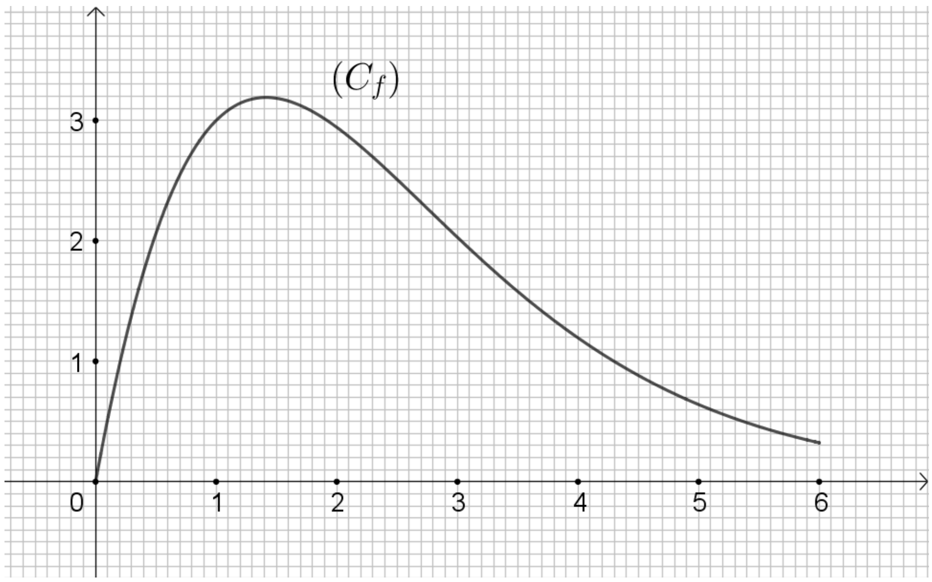
v 1.1

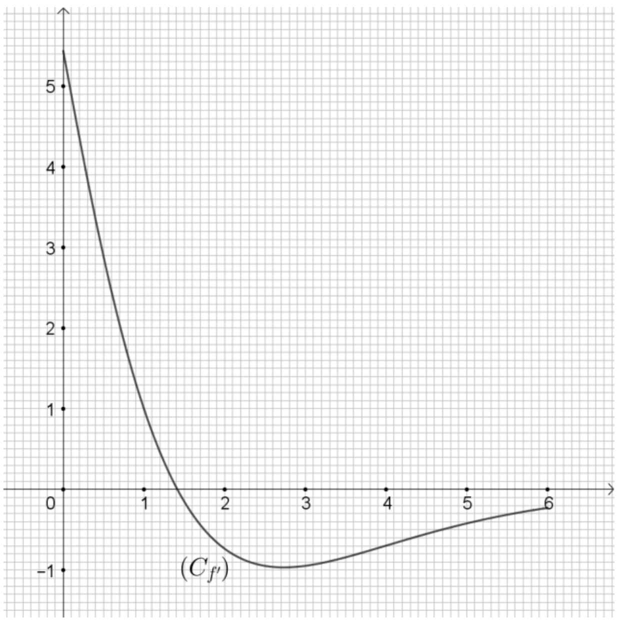
Énoncé exercice 1

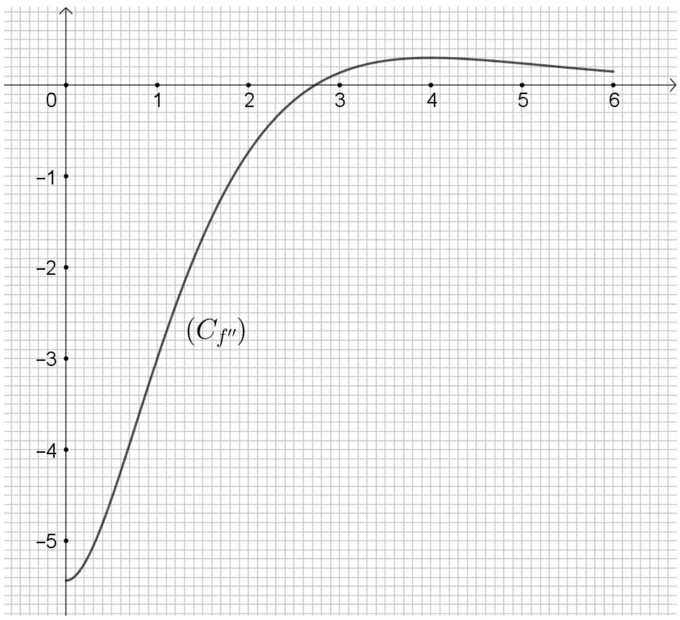
On considère une fonction f définie, continue et dérivable sur l'intervalle [0 ; 6].

On note f' la fonction dérivée de la fonction f, et f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f.

Les courbes respectives (C_f), $(C_{f'})$ et $(C_{f''})$ sont données ci-contre.







1. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur [0 ; 6].
   (aucune justification n'est demandée)

2. En justifiant soigneusement :
   a) Déterminer $f'(0)$.
   b) Déterminer les extremums de la fonction f sur [0 ; 6].
   c) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=1$ sur [0 ; 6].
   d) Étudier la convexité de la fonction f sur [0 ; 6].

CORRIGÉ Exercice 1

1. Tableau de variation :

x	0		$1,4$		6
Variations de f			$3,2$		
	0	↗		↘	$0,3$

2. a) La courbe représentée sur le 2ème graphique est $\left(C_{f'}\right)$, c'est-à-dire la courbe représentative de la fonction dérivée.

On observe que cette courbe passe par le point de coordonnées $\left(0\,;5,43\right)$. D'où $f'(0)=5,43$.

Remarque

Pour trouver $f'(0)$ on peut aussi utiliser la première courbe (celle représentant la fonction f), sachant que $f'(0)$ est le coefficient directeur la tangente à la courbe $\left(C_f\right)$ au point d'abscisse 0.

Mais cette tangente n'est pas tracée sur le graphique, il n'est donc pas aisé de déterminer son coefficient directeur avec précision.

b) D'après le tableau de variation de f :

f atteint en 0 un minimum valant 0 et en $1,4$ un maximum valant $3,2$.

c) . Sur [0 ; 1,4]

Dressons le tableau de variation de f sur $\left[\ 0\ ;\ 1{,}4\right]$:

x	0		$1,4$
Variations de f			$3,2$
		1	
	0	↗	

f est continue et strictement croissante sur $\left[\ 0\ ;\ 1{,}4\right]$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, tout nombre compris entre 0 et $3,2$ admet un unique antécédent dans $\left[\ 0\ ;\ 1{,}4\right]$.

Donc 1 (qui est compris entre 0 et $3,2$) admet un unique antécédent dans $\left[\ 0\ ;\ 1{,}4\right]$.

Autrement dit : l'équation $f\left(x\right)=1$ a une unique solution dans $\left[\ 0\ ;\ 1{,}4\right]$.

. Sur [1,4 ; 6]

Dressons le tableau de variation de f sur $\left[\ 1{,}4\ ;\ 6\right]$:

x	$1,4$		6
Variations de f	$3,2$	↘	
		1	
			$0,3$

f est continue et strictement décroissante sur $\left[\ 1{,}4\ ;\ 6\right]$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, tout nombre compris entre $0,3$ et $3,2$ admet un unique antécédent dans $\left[\ 1{,}4\ ;\ 6\right]$.

Donc 1 (qui est compris entre $0,3$ et $3,2$) admet un unique antécédent dans $\left[\ 1{,}4\ ;\ 6\right]$.

Autrement dit : l'équation $f\left(x\right)=1$ a une unique solution dans $\left[\ 1{,}4\ ;\ 6\right]$.

. Conclusion :

$\boxed{\text{l'équation } f(x)=1 \text{ a exactement deux solutions dans } [\ 0\ ;\ 6\ ].}$

d) La courbe représentée sur le 3ème graphique est $\left(C_{f''}\right)$, c'est-à-dire la courbe représentative de la fonction dérivée seconde.

Par conjecture :

$f''(x)<0$ ssi $x\in\left[0\ ;\ 2,7\right[$

$f''(x)>0$ ssi $x\in\left]2,7\ ;\ 6\right]$

$f''(x)=0$ ssi $x=2,7$

On en déduit que :

f est concave sur $\left[0\ ;\ 2,7\right]$

f est convexe sur $\left[2,7\ ;\ 6\right]$

Remarque : la courbe de f admet un point d'inflexion d'abscisse $2,7$.

EXERCICE 2 - Énoncé

Lisa et Enzo cherchent tous les deux un job d'été pour le mois de juillet prochain, rémunéré au moins 1 500 euros.

Partie A – *l'emploi de Lisa*

Lisa a trouvé un emploi de vendeuse, avec une rémunération très particulière :
sur les 20 jours de travail, le 1^er^ jour est rémunéré 100 euros, mais chaque journée suivante est rémunérée 2,50 euros de moins que la précédente (la deuxième journée sera donc payée 97,50 euros, la troisième 95 euros, etc.).

Pour tout entier naturel n, on note u_n la rémunération en euros de la $(n+1)^{\text{ème}}$ journée de travail.

1. Justifier que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

2. Montrer que pour tout entier naturel n : $u_n = 100 - \frac{5}{2}n$.

3. Calculer u_{19}. Que représente ce nombre ?

4. Calculer la rémunération totale pour les 20 journées de travail de Lisa. Conclure.

Partie B – *l'emploi de Enzo*

Enzo a trouvé un emploi de baby-sitter, avec une rémunération tout aussi particulière :
sur les 20 jours de travail, le 1^er^ jour est rémunéré 10 euros seulement, mais chaque journée suivante est rémunérée 20 % de plus que la précédente (la deuxième journée sera donc payée 12 euros, la troisième 14,40 euros, etc.).

Pour tout entier naturel n, on note v_n la rémunération en euros de la $(n+1)^{\text{ème}}$ journée de travail.

1. Justifier que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2. Montrer que pour tout entier naturel n : $v_n = 10 \times 1{,}2^n$.

3. Calculer v_{19} (on donnera une valeur approchée à 0,01 près). Que représente ce nombre ?

4. Calculer la rémunération totale pour les 20 journées de travail de Enzo. Conclure.

Partie C – *Comparaison des deux emplois*

On cherche à savoir à partir de quelle journée la rémunération journalière de Enzo va dépasser celle de Lisa.

1. Donner une méthode permettant de trouver ce résultat à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur.
On ne demande pas ici de déterminer le résultat.

2. a) Calculer u_9, u_{10} et u_{11}.
b) Calculer v_9, v_{10} et v_{11} (on donnera les valeurs approchées à 0,01 près).
c) Conclure.

CORRIGÉ Exercice 2

Partie A

1. u_n est la rémunération en euros de la $(n+1)^{\text{ème}}$ journée de travail.

Donc u_{n+1} est la rémunération en euros de la $(n+1+1)^{\text{ème}}$ journée de travail, c'est-à-dire la $(n+2)^{\text{ème}}$ journée, soit la journée suivante.

Or à partir du 2ème jour, le salaire diminue de 2,50 € par rapport au jour précédent, et ce jusqu'à la fin des 20 jours de travail.

Par conséquent, pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = u_n - 2{,}50$.

De plus, le premier terme est $u_0 = 100$ car le premier jour est payé 100 €.

Donc :

(u_n) est une suite arithmétique de raison $-2{,}5$ et de premier terme $u_0 = 100$.

2. D'après la propriété sur la forme explicite d'une suite arithmétique :
$u_n = u_0 + n \times (-2{,}5)$

$$\boxed{u_n = 100 - \frac{5}{2}n}$$

3. $u_{19} = 100 - \frac{5}{2} \times 19$

$$\boxed{u_{19} = 52{,}5}$$

Ce nombre correspond à la rémunération en euros du 20ème jour de travail, c'est-à-dire la dernière journée de travail.

4. Soit S la rémunération totale pour les 20 journées de travail de Lisa.
Donc S est la somme des 20 rémunérations lors de cette période :

$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ ... \ + u_{19}$

S est la somme des 20 premiers termes de la suite (u_n) :

$S = \text{nombre de termes} \times \frac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{d}^{\text{er}} \text{ terme}}{2}$

$S = 20 \times \frac{100 + 52{,}5}{2}$

$S = 1525$

Par conséquent :

la rémunération totale pour les 20 journées de travail de Lisa sera de 1 525 € .

Conclusion : en choisissant cet emploi, Lisa remplira bien son objectif de gagner au moins 1 500 euros.

Partie B

1. v_n est la rémunération en euros de la $(n+1)^{\text{ème}}$ journée de travail de Manon.

Donc v_{n+1} est la rémunération en euros de la $(n+1+1)^{\text{ème}}$ journée de travail, c'est-à-dire la $(n+2)^{\text{ème}}$ journée, soit la journée suivante.

Or à partir du 2ème jour, le salaire augmente de 20 % par rapport au jour précédent, et ce jusqu'à la fin des 20 jours de travail.

Par conséquent, pour tout entier naturel n :

$v_{n+1} = \left(1 + \frac{20}{100}\right) v_n = 1{,}2 v_n$

De plus, le premier terme est $v_0 = 10$ car le premier jour est payé 10 €.

Donc :

(v_n) est une suite géométrique de raison 1,2 et de premier terme $v_0 = 10$.

2. D'après la propriété sur la forme explicite d'une suite géométrique :

$v_n = v_0 \times 1{,}2^n$

$$\boxed{v_n = 10 \times 1{,}2^n}$$

3. $v_{19} = 10 \times 1{,}2^{19}$

$v_{19} \approx 319{,}48$ arrondi à 0,01 près

Ce nombre correspond à la rémunération en euros du 20ème jour de travail, c'est-à-dire la dernière journée de travail.

4. Soit S' la rémunération totale pour les 20 jours de travail de Enzo.

Donc S' est la somme des 20 rémunérations lors de cette période :

$S' = v_0 + v_1 + v_2 + \ ... \ + v_{19}$

S' est la somme des 20 premiers termes de la suite (v_n) :

$S' = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$

$S' = 10 \times \frac{1 - 1{,}2^{20}}{1 - 1{,}2}$

$S' \approx 1866{,}88$ arrondi à 0,01 près

Par conséquent :

la rémunération totale pour les 20 journées de travail de Enzo sera environ de 1 867 €.

Conclusion :
en choisissant cet emploi, Enzo remplira bien son objectif de gagner au moins 1 500 euros.

Partie C

1. Dans la première colonne d'un tableur, on affiche les 20 rémunérations journalières de Lisa.
Dans une deuxième colonne, on affiche les 20 rémunérations journalières de Enzo.
Et on compare les résultats.

Remarque : l'algorithme correspondant est le suivant :

```
Variables :
    N, U, V
Initialisation
    N = 0
    U = 100
    V = 10
Traitement
    Tant que V ≤ U
        U prend la valeur U -2,5
        V prend la valeur V * 1.2
        N prend la valeur N + 1
    Fin Tant que
Sortie
Afficher N
```

2. a)

$u_9 = 100 - 2{,}5 \times 9 = 77{,}5$

$u_{10} = 100 - 2{,}5 \times 10 = 75$

$u_{11} = 100 - 2{,}5 \times 11 = 72{,}5$

b)

$v_9 = 10 \times 1{,}2^9 \approx 51{,}60$

$v_{10} = 10 \times 1{,}2^{10} \approx 61{,}92$

$v_{11} = 10 \times 1{,}2^{11} \approx 74{,}30$

c) Des résultats précédents, on déduit que :

la rémunération journalière de Enzo va dépasser celle de Lisa à partir de la 12ème journée.

EXERCICE 3 - Énoncé

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 40\ 000 \\ u_{n+1} = 0,95\ u_n + 200 \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. a) Calculer u_1 et u_2 .
b) Montrer que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. À l'aide de la calculatrice, conjecturer :
a) le sens de variation de la suite (u_n) ;
b) la limite de la suite (u_n).

3. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 4\ 000$.
a) Montrer que $v_0 = 36\ 000$
b) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
c) Exprimer v_n en fonction de n.
d) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 4\,000 + 36\,000 \times 0,95^n$.

4. Déterminer u_{50}.

CORRIGÉ Exercice 3

1. a) On sait que $u_0 = 40\ 000$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,95\ u_n + 200$.

D'où : $u_1 = 0,95\ u_0 + 200$
$u_1 = 0,95 \times 40\ 000 + 200$
$\boxed{u_1 = 38\ 200}$

Et : $u_2 = 0,95\ u_1 + 200$
$u_2 = 0,95 \times 38\ 200 + 200$
$\boxed{u_2 = 36\ 490}$

b) $u_1 - u_0 = 38\ 200 - 40\ 000 = -1\ 800$
$u_2 - u_1 = 36\ 490 - 38\ 200 = -1\ 710$
D'où $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$
Donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

$u_1/u_0 = 38\ 200/40\ 000 = 191/200 = 0,955$
$u_2/u_1 = 36\ 490/38\ 200 \approx 0,955236$
D'où $u_2/u_1 \neq u_1/u_0$
Donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

2. À l'aide de la calculatrice, on peut conjecturer :

a) $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ semble strictement décroissante sur } \mathbb{N}.}$

b) $\boxed{\text{la limite de la suite } (u_n) \text{ semble être } 4\ 000.}$

3. D'après l'énoncé, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 4\ 000$

a) $v_0 = u_0 - 4\ 000$
$v_0 = 40\ 000 - 4\ 000$
$\boxed{v_0 = 36\ 000}$

b) Pour tout entier n :
$v_n = u_n - 4\ 000$; donc :
$v_{n+1} = u_{n+1} - 4\ 000$
$= 0,95\ u_n + 200 - 4\ 000$
$= 0,95\ u_n - 3\ 800$
$= 0,95\ (u_n - 3800/0,95)$
$= 0,95\ (u_n - 4\ 000)$
$= 0,95\ v_n$

0,95 est une constante
Par conséquent :
(v_n) est une suite géométrique de raison 0,95.

c) D'après la propriété sur la forme explicite d'une suite géométrique,
pour tout entier naturel n :
$v_n = v_0 \times 0,95^n$
$\boxed{v_n = 36\ 000 \times 0,95^n}$

d) Pour tout entier naturel n :
$v_n = u_n - 4\ 000$
$v_n + 4\ 000 = u_n$
D'où : $u_n = v_n + 4\ 000$
$u_n = 36\ 000 \times 0,95^n + 4\ 000$
$\boxed{u_n = 4\,000 + 36\,000 \times 0,95^n}$

4. $u_{50} = 4\,000 + 36\,000 \times 0,95^{50}$
$\boxed{u_{50} \approx 6\ 770,02 \text{ arrondi à 0,01 près}}$

EXERCICE 4 - Énoncé

Partie A

On considère le trinôme $A(x)=x^2+2x-3$ défini sur $\mathbb{R}$.
Étudier le signe de $A(x)$ en fonction des valeurs de x.

Partie B

On considère f la fonction définie sur l'intervalle $[\,0\,;\,3\,]$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1}$

On appelle (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1. a) Expliquer pourquoi la fonction f est strictement positive sur $[\,0\,;\,3\,]$.

b) Que peut-on en déduire quant à la courbe (C) ?

2. Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(3)$.

3. On note f' la dérivée de la fonction f sur $[\,0\,;\,3\,]$

a) Montrer que pour tout réel x de $[\,0\,;\,3\,]$:

$f'(x)=\dfrac{A(x)}{(x+1)^2}$ où $A(x)$ est le polynôme de la partie A.

b) En déduire le signe de $f'(x)$ en fonction des valeurs de x.
En déduire que f est strictement décroissante sur $[\,0\,;\,1\,]$ et strictement croissante sur $[\,1\,;\,3\,]$.

4. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[\,0\,;\,3\,]$.

5. Donner les extremums de la fonction f sur $[\,0\,;\,3\,]$.

6. Montrer que l'équation $f(x)=2{,}5$ possède exactement deux solutions dans $[\,0\,;\,3\,]$.
(il n'est pas demandé de déterminer ces solutions)

7. Étudier la convexité de la fonction f sur $[\,0\,;\,3\,]$.

Questions bonus

8. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

9. On donne : $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\approx 2{,}17$ et $f(2)\approx 2{,}33$.

Tracer la droite (T) puis la courbe (C) dans un repère dont on choisira convenablement les unités.

CORRIGÉ Exercice 4

Partie A

Pour tout réel x,

$A(x)=x^2+2x-3$.

x^2+2x-3 est un polynôme de degré 2.

Soit Δ son discriminant.
$\Delta=2^2-4\times1\times(-3)=16$
$\Delta>0$
donc le polynôme x^2+2x-3 possède exactement deux racines x_1 et x_2 telles que :

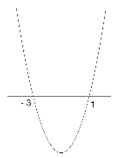
- $x_1=\dfrac{-2-\sqrt{16}}{2\times1}=\dfrac{-2-4}{2}=-3$
- $x_2=\dfrac{-2+\sqrt{16}}{2\times1}=\dfrac{-2+4}{2}=1$

Donc x^2+2x-3 possède deux racines distinctes : -3 et 1.

La parabole représentative de la fonction $x\mapsto x^2+2x-3$ coupe l'axe des abscisses en exactement deux points, d'abscisses respectives -3 et 1.

De plus le coefficient du terme x^2, égal à 1, est positif, donc la parabole est « tournée vers le haut ».

Cette parabole a l'allure suivante :



Donc :

$A(x)<0$ ssi $x\in\,]-3;1[$
$A(x)>0$ ssi $x\in\,]-\infty;-3[\,\cup\,]1;+\infty[$
$A(x)=0$ ssi $x=-3$ ou $x=1$

Partie B

1. $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1}$

Pour tout x de [0 ; 3] :

. $x^2+3>0$

. $x+1>0$

Donc pour tout x de $[0\ ;\ 3]$, $f(x)>0$.

Autrement dit : la fonction f est strictement positive sur $[0\ ;\ 3]$.

b) on en déduit que :

$\boxed{\text{la courbe représentative (C) de la fonction } f \text{ est strictement au-dessus de l'axe des abscisses.}}$

2. $f(0)=\dfrac{0^2+3}{0+1}=\boxed{3}$

$f(1)=\dfrac{1^2+3}{1+1}=\dfrac{4}{2}=\boxed{2}$

$f(3)=\dfrac{3^2+3}{3+1}=\dfrac{12}{4}=\boxed{3}$

3. $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1}$

a) f est une fonction rationnelle définie sur $[0\ ;\ 3]$ donc dérivable sur $[0\ ;\ 3]$.

Pour tout réel x de $[0\ ;\ 3]$:

$$f'(x)=\frac{(2x)(x+1)-(x^2+3)(1)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^2+2x-x^2-3}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{A(x)}{(x+1)^2}$$

b) Pour tout réel x de $[0\ ;\ 3]$, $(x+1)^2>0$

Donc $f'(x)$ est du signe de $A(x)$.

Or d'après la partie A :

$A(x)<0$ ssi $x\in]-3;1[$

$A(x)>0$ ssi $x\in]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$

$A(x)=0$ ssi $x=-3$ ou $x=1$

On en déduit que :

$\boxed{f'(x)<0 \text{ ssi } x\in[0;1[}$
$\boxed{f'(x)>0 \text{ ssi } x\in]1;3]}$
$\boxed{f'(x)=0 \text{ ssi } x=1}$

De la question précédente, on déduit que :

$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } [0\ ;\ 1] \text{ et strictement croissante sur } [1\ ;\ 3]}$.

4. Des questions précédentes, on déduit le tableau de variation de f :

x	0		1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	3

5. Par lecture du tableau de variation précédent :

$\boxed{f \text{ atteint en 1 un minimum valant 2.}}$
$\boxed{f \text{ atteint en 0 et en 3 un maximum valant 3.}}$

6. Sur [0 ; 1]

Dressons le tableau de variation de f sur [0 ; 1] :

x	0		1
f	3	$\searrow$ 2,5	2

f est continue et strictement croissante sur [0 ; 1]. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, tout nombre compris entre 2 et 3 admet un unique antécédent dans [0 ; 1].

Donc 2,5 admet un unique antécédent dans [0 ; 1].

Autrement dit : l'équation $f(x)=2{,}5$ a une unique solution dans [0 ; 1].

Sur [1 ; 3]

Dressons le tableau de variation de f sur [1 ; 3] :

x	1		3
f	2	$\nearrow$ 2,5	3

f est continue et strictement croissante sur [1 ; 3]. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, tout nombre compris entre 2 et 3 admet un unique antécédent dans [1 ; 3].

Donc 2,5 admet un unique antécédent dans [1 ; 3].

Autrement dit : l'équation $f(x)=2{,}5$ a une unique solution dans [1 ; 3].

On en conclut que l'équation $f(x)=2{,}5$ possède exactement deux solutions dans $[0\ ;\ 3]$ (l'un appartenant à l'intervalle [0 ; 1] et l'autre à l'intervalle [1 ; 3])

7. D'après la question 4.a)

$$f'(x)=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

f' est dérivable sur [0 ; 3].

Pour tout réel x de [0 ; 3] :

$$f''(x)=\frac{(2x+2)(x+1)^2-(x^2+2x-3)(2\times1\times(x+1))}{\left[(x+1)^2\right]^2}$$

$$f''(x)=\frac{(2x+2)(x+1)^2-(x^2+2x-3)(2x+2)}{(x+1)^{2\times2}}$$

$$f''(x)=\frac{(2x+2)\left[(x+1)^2-(x^2+2x-3)\right]}{(x+1)^4}$$

$$f''(x)=\frac{(2x+2)(x^2+2x+1-x^2-2x+3)}{(x+1)^4}$$

$$f''(x)=\frac{(2x+2)(4)}{(x+1)^4}$$

$$f''(x)=\frac{8(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$f''(x)=\frac{8}{(x+1)^3}$$

Or pour tout réel x de [0 ; 3] : $(x+1)^3>0$

donc $f''(x)\geq 0$

Par conséquent :

$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est convexe sur } [0\ ;\ 3]}$

8. L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 est :

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$

. $f(0)=3$

. $f'(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$

$f'(x)=\dfrac{0^2+2\times0-3}{(0+1)^2}$

$f'(0)=\dfrac{-3}{1^2}=-3$

Donc l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 est alors :

$y=-3(x-0)+3$

$\boxed{y=-3\,x+3}$

9. Graphique :