ÉNONCÉ et CORRIGÉ

Thèmes : CTVI - Convexité
Fonctions – Lecture graphique –
Signe - Nombre dérivé - Extrema

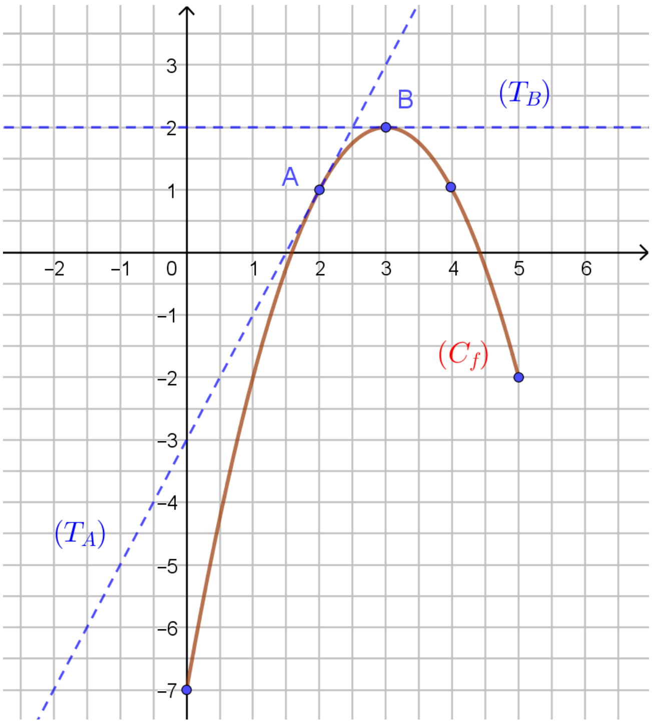
v 1.1

ÉNONCÉGÉNÉRAL

Exercice 1

Sur le graphique ci-contre :

- la courbe (C_f) représente une fonction f définie sur un intervalle I ;
- la droite (T_A) est la tangente à (C_f) au point A d'abscisse 2 ;
- la droite (T_B) est la tangente à (C_f) au point B d'abscisse 3.



Sans justification, donner :

a) le tableau de variation de f ;

b) les solutions de l'équation $f(x)=1$;

c) les valeurs de $f'(2)$ et $f'(3)$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[-2;3]$ par : $f(x)=-x^3+2x^2-x+2$.

1. Calculer $f(1)$, $f(3)$ et $f(-2)$.

2. Soit f' la fonction dérivée de f sur $[-2;3]$.

a) Calculer $f'(x)$ en fonction de x.

b) En étudiant le signe de $f'(x)$ en fonction des valeurs de x, montrer que f est strictement décroissante sur $[-2;1/3]$, strictement croissante sur $[1/3;1]$ et strictement décroissante sur $[1;3]$.

3. On admettra que $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{50}{27}$.

Dresser le tableau de variation de f sur $[-2;3]$.

4. Par lecture du tableau de variation de f, donner les extrema de la fonction f sur $[-2;3]$.

5. a) Expliquer pourquoi l'équation $f(x)=0$ n'admet aucune solution dans $[-2;1]$.

b) Expliquer pourquoi l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans $[1;3]$.

c) En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ dans $[-2;3]$.

Il n'est pas demandé ici de résoudre l'équation.

6. a) Vérifier que pour tout x de $[-2;3]$, $f(x)=(x^2+1)(2-x)$.

b) Résoudre dans $[-2;3]$ l'équation $f(x)=0$.

7. Étudier le signe de la fonction f.

8. Soit f'' la fonction dérivée seconde de f sur $[-2;3]$.

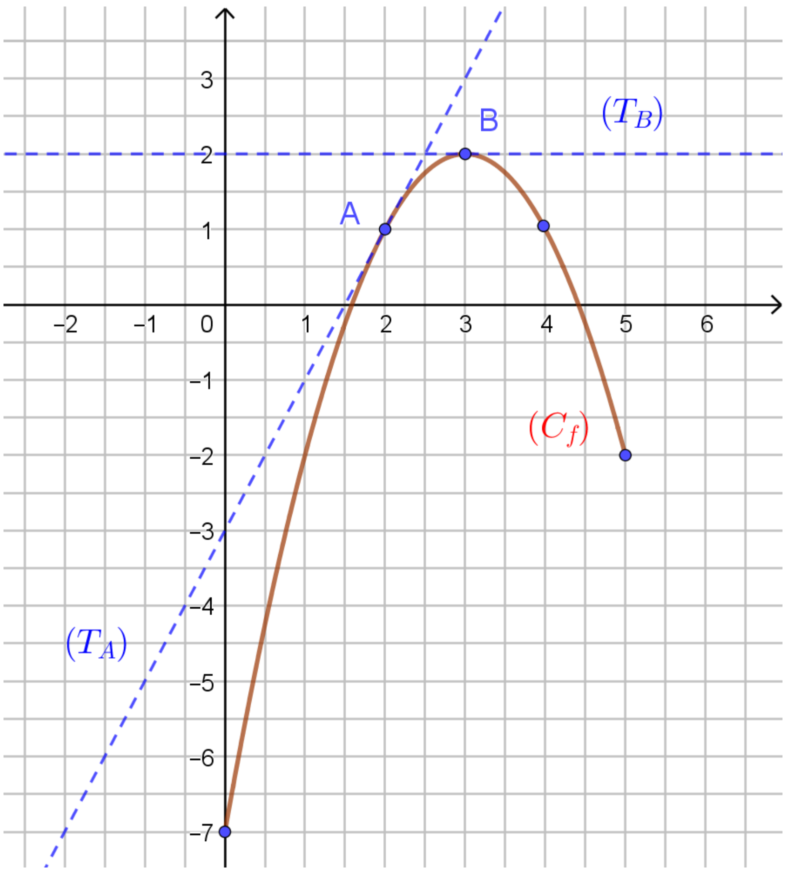
a) Calculer $f''(x)$ en fonction de x.

b) Étudier la convexité de la fonction f.

Énoncé EXERCICE 1

Sur le graphique ci-contre :

- la courbe (C_f) représente une fonction f définie sur un intervalle I ;
- la droite (T_A) est la tangente à (C_f) au point A d'abscisse 2 ;
- la droite (T_B) est la tangente à (C_f) au point B d'abscisse 3.



Sans justification, donner :

a) le tableau de variation de f ;

b) les solutions de l'équation $f(x)=1$;

c) les valeurs de $f'(2)$ et $f'(3)$.

CORRIGÉ

a) Tableau de variation :

x	0		3		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-7	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2

b) $\boxed{\text{L'équation } f(x)=1 \text{ admet exactement deux solutions : 2 et 4.}}$

Justification (non demandée par l'énoncé) :
Les solutions de l'équation $f(x)=1$ sont les abscisses des points de la courbe qui ont pour ordonnée 1.
Or la courbe passe par exactement deux points d'ordonnée 1 : les points de coordonnées $(2;1)$ et $(4;1)$.

c) $\boxed{f'(2)=2}$

Justification (non demandée par l'énoncé) :
$f'(2)$ est le coefficient directeur la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 2.
$f'(2)$ est donc le coefficient directeur de la tangente horizontale (T_A).

$\boxed{f'(3)=0}$

Justification (non demandée par l'énoncé) :
$f'(3)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 3.
$f'(3)$ est donc le coefficient directeur de la tangente (T_B).

Énoncé EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur $[-2;3]$ par :
$f(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 2$.

1. Calculer $f(1)$, $f(3)$ et $f(-2)$.

2. Soit f' la fonction dérivée de f sur $[-2;3]$.

a) Calculer $f'(x)$ en fonction de x.

b) En étudiant le signe de $f'(x)$ en fonction des valeurs de x, montrer que f est strictement décroissante sur $[-2;1/3]$, strictement croissante sur $[1/3;1]$ et strictement décroissante sur $[1;3]$.

3. On admettra que $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{50}{27}$.

Dresser le tableau de variation de f sur $[-2;3]$.

4. Par lecture du tableau de variation de f, donner les extrema de la fonction f sur $[-2;3]$.

5. a) Expliquer pourquoi l'équation $f(x)=0$ n'admet aucune solution dans $[-2;1]$.

b) Expliquer pourquoi l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans $[1;3]$.

c) En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ dans $[-2;3]$.

Il n'est pas demandé ici de résoudre l'équation.

6. a) Vérifier que pour tout x de $[-2;3]$, $f(x) = (x^2+1)(2-x)$.

b) Résoudre dans $[-2;3]$ l'équation $f(x)=0$.

7. Étudier le signe de la fonction f.

8. Soit f'' la fonction dérivée seconde de f sur $[-2;3]$.

a) Calculer $f''(x)$ en fonction de x.

b) Étudier la convexité de la fonction f.

CORRIGÉ

$f(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 2 \quad (x \in [-2;3])$

1. $f(1) = -1^3 + 2\times1^2 - 1 + 2$

$f(1) = -1+2-1+2 = \boxed{2}$

$f(3) = -3^3 + 2\times3^2 - 3 + 2$

$f(3) = -27+18-3+2 = \boxed{-10}$

$f(-2) = -(-2)^3 + 2\times(-2)^2 - (-2) + 2$

$f(-2) = +8+8+2+2 = \boxed{20}$

2. a) La fonction f est dérivable sur $[-2;3]$.

Pour tout réel x de $[-2;3]$:

$\boxed{f'(x) = -3x^2 + 4x - 1}$

b) $-3x^2+4x-1$ est un polynôme de degré 2.
Soit Δ son discriminant.

$\Delta = 4^2 - 4\times(-3)\times(-1) = 16-12 = 4$

$\Delta > 0$, donc le polynôme $-3x^2+4x-1$ a exactement deux racines x_1 et x_2 telles que :

. $x_1 = \dfrac{-4-\sqrt{4}}{2\times(-3)} = \dfrac{-4-2}{-6} = 1$

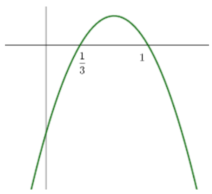
. $x_2 = \dfrac{-4+\sqrt{4}}{2\times(-3)} = \dfrac{-4+2}{-6} = \dfrac{-2}{-6} = \dfrac{1}{3}$

Donc $-3x^2+4x-1$ a deux racines distinctes : 1 et 1/3.

La parabole représentative de la fonction $x \mapsto -3x^2+4x-1$ coupe l'axe des abscisses en exactement deux points, d'abscisses respectives 1 et 1/3.

De plus le coefficient du terme x^2, égal à -3, est positif, donc la parabole est « tournée vers le bas ».

Cette parabole a l'allure suivante :



Par conséquent :

$-3x^2+4x-1>0$ ssi $x \in]1/3;1[$

$-3x^2+4x-1<0$ ssi $x \in [-2;-1/3[\cup]1;3]$

$-3x^2+4x-1=0$ ssi $x=1/3$ ou $x=1$

D'où :

$f'(x)>0$ ssi $x \in]1/3;1[$

$f(x)<0$ ssi $x \in [-2;-1/3[\cup]1;3]$

$f'(x)=0$ ssi $x=1/3$ ou $x=1$

Par conséquent :

f est strictement décroissante sur $[-2;1/3]$, strictement croissante sur $[1/3;1]$ et strictement décroissante sur $[1;3]$.

3. tableau de variation de f sur $\left[-2;3\right]$:

x	-2		$\frac{1}{3}$		1		3
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	20	$\searrow$	$\frac{50}{27}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-10

4. Par lecture du tableau de variation sur $\left[-2;3\right]$:

$\boxed{\text{$f$ atteint en 3 un minimum valant -10 et en -2 un maximum valant 20.}}$

5. a)

x	-2		$\frac{1}{3}$		1
f	20	$\searrow$	$\frac{50}{27}$	$\nearrow$	2

Sur l'intervalle $\left[-2;1\right]$, f atteint en $1/3$ un minimum strictement positif valant $50/27$, donc f n'atteint pas la valeur 0. Donc l'équation $f(x)=0$ n'a aucune solution dans $\left[-2;1\right]$.

b) Dressons le tableau de variation de f sur $\left[1;3\right]$:

x	1		3
f	2	$\searrow$ 0 $\searrow$	-10

f est continue et strictement décroissante sur $\left[1;3\right]$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, tout nombre compris entre -10 et 2 admet un unique antécédent dans $\left[1;3\right]$.

Donc 0 admet un unique antécédent dans $\left[1;3\right]$.

Autrement dit : l'équation $f(x)=0$ a une unique solution dans $\left[1;3\right]$.

c) L'équation $f(x)=0$ n'admet aucune solution dans $\left[-2;1\right]$ et une unique solution dans $\left[1;3\right]$.

Par conséquent :

$\boxed{\text{l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans $\left[-2;3\right]$.}}$

6. a) Pour tout x de $\left[-2;3\right]$:

$$\begin{aligned}(x^2+1)(2-x) &= 2x^2-x^3+2-x\\ &= -x^3+2x^2-x+2\\ &= f(x)\end{aligned}$$

b) Pour tout x de $\left[-2;3\right]$, les assertions suivantes sont équivalentes :

$f(x)=0$

$(x^2+1)(2-x)=0$

$(x^2+1)=0$ ou $(2-x)=0$

$x^2=-1$ ou $x=2$

Impossible

Par conséquent :

$\boxed{\text{l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans $\left[-2;3\right]$: 2 .}}$

7. D'après les questions précédentes, on peut dresser le tableau de variation de f sur $\left[-2;3\right]$, en le complétant par l'unique racine de $f(x)$ (trouvée à la question 7b) :

x	-2		$\frac{1}{3}$		1		2		3
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
f	20	$\searrow$	$\frac{50}{27}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-10

On peut alors en déduire :

. $f(x)>0$ ssi $x\in\left[-2;2\right[$
. $f(x)<0$ ssi $x\in\left]2;3\right]$
. $f(x)=0$ ssi $x=2$

<u>Autre méthode</u> : avec un tableau de signes

x	-2		2		3
x^2+1		$+$		$+$	
$2-x$		$+$	0	$-$ (signe de -1)	
$f(x)$		$+$	0	$-$	

D'où :

. $f(x)>0$ ssi $x\in\left[-2;2\right[$
. $f(x)<0$ ssi $x\in\left]2;3\right]$
. $f(x)=0$ ssi $x=2$

8. a) Pour tout réel x de $\left[-2;3\right]$:

$f'(x)=-3x^2+4x-1$

La fonction f' est dérivable sur $\left[-2;3\right]$.

Pour tout réel x de $\left[-2;3\right]$:

$\boxed{f''(x)=-6x+4}$

b) Étudions le signe de f'' :

x	-2		$2/3$		3
$-6x+4$		$+$	0	$-$ (signe de -6)	

Par conséquent :

$f''(x)>0$ ssi $x\in\left[-2;2/3\right[$

$f''(x)<0$ ssi $x\in\left]2/3;3\right]$

$f''(x)=0$ ssi $x=2/3$

On en déduit que :

$\boxed{\text{$f$ est convexe sur $\left[-2;2/3\right]$; f est concave sur $\left[2/3;3\right]$}}$

Remarque :
la courbe de f admet un point d'inflexion d'abscisse $2/3$.