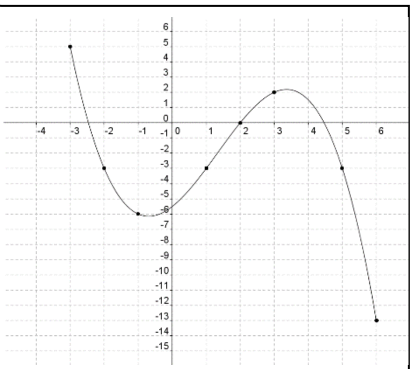
Énoncé Exercice 1

On considère une fonction f dont la représentation graphique C_f est représentée ci-contre.



Par conjecture graphique, sans justification :

a) donner l'ensemble de définition de f ;

b) donner l'image de 2 par la fonction f ;

c) donner le ou les éventuels antécédents de 5 par la fonction f ;

d) donner les solutions de l'équation $f(x)=-3$.

CORRIGÉ

1) L'ensemble de définition de f est $[-3\ ;\ 6]$.

Explication (non demandée par l'énoncé) :
L'ensemble de définition est l'ensemble des abscisses de tous les points de la courbe.

2) $\boxed{\text{L'image de 2 par la fonction } f \text{ est } 0}$.

Explication (non demandée par l'énoncé) :
La courbe de f passe par le point de coordonnées $(2\ ;0)$.

3) 5 a un unique antécédent par f : -3.

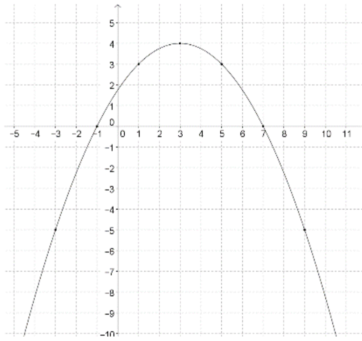
Explication (non demandée par l'énoncé) :
La courbe de f passe par un unique point d'ordonnée 5 : le point de coordonnées $(-3\ ;5)$.

4) $\boxed{\text{L'équation } f(x)=-3 \text{ a exactement trois solutions : } -2\ ;\ 1 \text{ et } 5.}$

Explication (non demandée par l'énoncé) :
La courbe de f passe par exactement trois points d'ordonnée -3 :
les points de coordonnées $(-2\ ;\ -3)$, $(1\ ;\ -3)$ et $(5\ ;\ -3)$.

Énoncé Exercice 2

On considère la fonction polynôme de degré 2 dont la parabole représentative est donnée sur le graphique ci-dessous :



Quelles informations concernant la fonction peut-on conjecturer ? Justifier.

CORRIGÉ

. Les abscisses de tous les points de la courbe vont de $-\infty$ à $+\infty$.

On peut donc conjecturer que :

$\boxed{\text{l'ensemble de définition de la fonction est } \mathbb{R}.}$

. Sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 3]$, la courbe « monte » et sur l'intervalle $[3\ ;\ +\infty[$, la courbe « descend ».

On peut donc conjecturer que :

> la fonction est strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ 3]$ et strictement décroissante sur $[3\ ;\ +\infty[$.

. Sur les intervalles $]0\ ;\ -1[$ et $]7\ ;\ +\infty[$, la courbe est strictement en dessous de l'axe des abscisses.

Sur l'intervalle $]-1\ ;\ 7[$, la courbe est strictement au-dessus de l'axe des abscisses.

En -1 et en 7, la courbe coupe l'axe des abscisses.

On peut donc conjecturer que :

> . la fonction est strictement positive sur $]-1\ ;\ 7[$;
>
> . la fonction est strictement négative sur $]-\infty\ ;\ -1[\cup]7\ ;\ +\infty[$;
>
> . la fonction s'annule en -1 et en 7.

. Le point le plus « haut » de la courbe a pour coordonnées $(3\ ;4)$. On peut donc conjecturer que la fonction atteint un maximum en 3 et ce maximum vaut 4.

Énoncé Exercice 3

Résoudre dans ℝ l'inéquation $2x^2+5x-3\geq 0$.

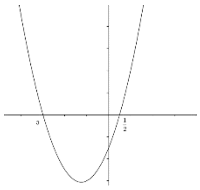
CORRIGÉ

$2x^2+5x-3$ est un polynôme de degré 2. Son discriminant est : $\Delta=5^2-4\times 2\times(-3)=49$

Donc le polynôme $2x^2+5x-3$ a deux racines x_1 et x_2 telles que :

$x_1=\dfrac{-5-\sqrt{49}}{2\times 2}=\dfrac{-5-7}{4}=-3$ et $x_2=\dfrac{-5+\sqrt{49}}{2\times 2}=\dfrac{-5+7}{4}=\dfrac{1}{2}$

La parabole représentative de la fonction $x\mapsto 2x^2+5x-3$ a donc pour allure :

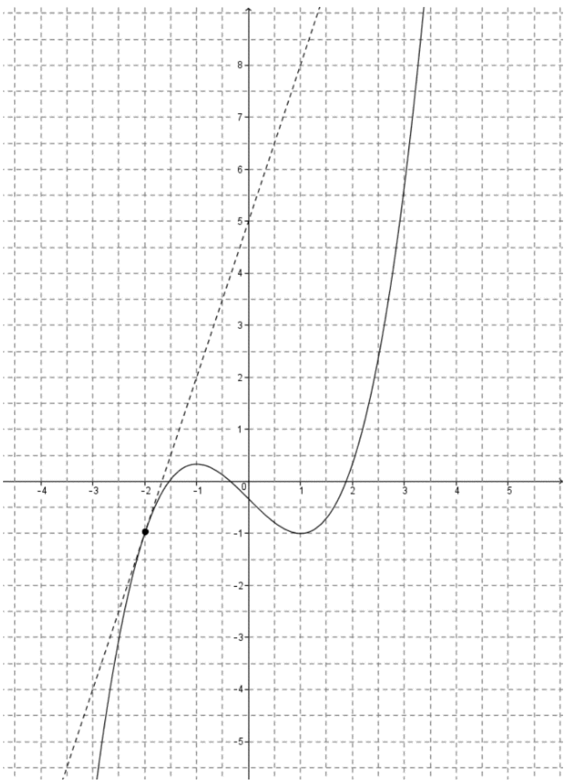


Par conséquent : $\boxed{\text{l'ensemble de solutions de l'inéquation } 2x^2+5x-3\geq 0 \text{ est }]-\infty\,;\,-3]\cup[1/2\,;\,+\infty[\,.}$

Énoncé Exercice 4

On considère une fonction f dont la représentation graphique C_f est représentée ci-dessous.

La droite représentée est la tangente à la courbe au point d'abscisse -2



Déterminer graphiquement $f(-2)$ et $f'(-2)$ (justifier soigneusement).

CORRIGÉ

. $f(-2)$ est l'image de -2 par la fonction f.

Graphiquement, il s'agit de l'ordonnée du point de la courbe qui a pour abscisse -2.

Or la courbe passe par le point de coordonnées $(-2\,;-1)$.

Par conséquent : $\boxed{f(-2)=-1}$

. $f'(-2)$ est le nombre dérivé de la fonction f en -2.

Graphiquement, il s'agit du coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse -2.

Or cette tangente a pour coefficient directeur 3 .

Donc : $\boxed{f'(-2)=3}$

Énoncé Exercice 5

Étudier sur $[-10\,,10\,]$ la fonction définie par : $f(x) = x^3 + x^2$

(sens de variation, tableau de variation, extrema)

CORRIGÉ

- Détermination de la dérivée f'

  f est une fonction polynôme définie sur $[-10\,,10\,]$ donc dérivable sur $[-10\,,10\,]$.

  Pour tout réel x de $[-10\,,10\,]$:

  $$f'(x) = 3x^2 + 2x$$
  $$f'(x) = x(3x+2)$$

- Étude du signe de f'

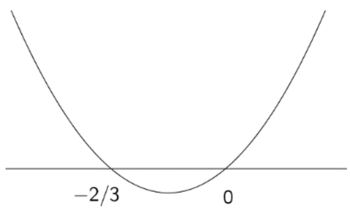
  $$f'(x) = 3x^2 + 2x = x(3x+2)$$

  Donc $f'(x)$ est un polynôme de degré 2 qui s'annule en 0 et $-\dfrac{2}{3}$.

  Donc la parabole représentative de f' coupe l'axe des abscisses en exactement deux points, d'abscisses respectives $-\dfrac{2}{3}$ et 0.

  De plus le coefficient du terme x^2, égal à 3, est positif, donc la parabole est « tournée vers le haut ».

  Cette parabole a l'allure suivante :



  Par conséquent :

  $$f'(x) < 0 \text{ ssi } x \in \left]-\frac{2}{3}, 0\right[$$
  $$f'(x) > 0 \text{ ssi } x \in \left[-10, -\frac{2}{3}\right[\cup \left]0, 10\right]$$
  $$f'(x) = 0 \text{ ssi } x = -\frac{2}{3} \text{ ou } x = 0$$

- Sens de variation de f

  Du signe de la dérivée, on déduit que :

  f est strictement croissante sur $\left[-10\,,-\dfrac{2}{3}\right]$, strictement décroissante sur $\left[-\dfrac{2}{3}\,,0\right]$ et strictement croissante sur $[\,0\,,10\,]$.

- Calcul des images :

  $$f(-10) = (-10)^3 + (-10)^2 = \ldots = -900$$
  $$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \ldots = \frac{4}{27}$$
  $$f(0) = 0^3 + 0^2 = 0$$
  $$f(10) = 10^3 + 10^2 = \ldots = 1100$$

- Tableau de variation de f :

x	-10		$-2/3$		0		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-900	↗	$4/27$	↘	0	↗	1100

- Extrema de f :

  D'après le tableau de variation de f :

  . f atteint en -10 un minimum valant -900
  . f atteint en 10 un maximum valant 1100

Énoncé Exercice 6

Partie A

Étudier le signe de l'expression : $A(x)=x^2-5x+4$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[\,0\,,6\,]$ par :

$$f(x)=2x^3-15x^2+24x-11$$

1. Calculer $f(0)$.

2. a) Vérifier que

$$f(x)=(x-1)^2(2x-11).$$

b) Résoudre dans sur $[\,0\,,6\,]$ l'équation $f(x)=0$.

c) Étudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

3. Soit f' la fonction dérivée de f sur $[\,0\,,6\,]$.

a) Calculer $f'(x)$ en fonction de x.
Montrer que pour tout réel x de $[\,0\,,6\,]$:
$f'(x)=6\,A(x)$.

b) En déduire que $f'(x)$ a le même signe que $A(x)$.

c) En déduire le sens de variation de f sur $[\,0\,,6\,]$.

4. Dresser le tableau de variation de f sur $[\,0\,,6\,]$.

Placer $f\left(\dfrac{11}{2}\right)$ dans ce tableau.

On admettra que $f(4)=-27$ et $f(6)=25$.

5. Par lecture du tableau de variation, retrouver les résultats de la question 2)c).

CORRIGÉ

Partie A

$A(x)=x^2-5x+4$

$A(x)$ est un polynôme de degré 2.

Soit Δ son discriminant.

$\Delta=(-5)^2-4\times1\times4$ $\Delta=25-16=9$

$\Delta>0$ donc le polynôme x^2-5x+4 a exactement deux racines x_1 et x_2 telles que :

$$x_1=\frac{-(-5)-\sqrt{9}}{2\times1}=\frac{2}{2}=1$$

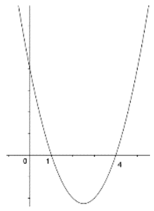
$$x_2=\frac{-(-5)+\sqrt{9}}{2\times1}=\frac{8}{2}=4$$

Donc $A(x)$ a deux racines distinctes : 1 et 4 .

Donc la parabole représentative de la fonction $x\mapsto x^2-5x+4$ coupe l'axe des abscisses en exactement deux points, d'abscisses respectives 1 et 4. De plus le coefficient du terme x^2, égal à 1, est positif, donc la parabole est « tournée vers le haut ».

3

Cette parabole a l'allure suivante :



Donc :

$$\boxed{\begin{array}{l} A(x)<0 \text{ ssi } x\in\,]1\,,4\,[\\ A(x)>0 \text{ ssi } x\in\,]-\infty\,,1\,[\,\cup\,]\,4\,,+\infty\,[\\ A(x)=0 \text{ ssi } x=1 \text{ ou } x=4 \end{array}}$$

Partie B

$$f(x)=2x^3-15x^2+24x-11$$

avec $x\in[\,0\,,6\,]$

1. Image de 0 par f :

$$f(0)=2\times0^3-15\times0^2+24\times0-11$$

$$\boxed{f(0)=-11}$$

2. a) Pour tout réel x de [0 ; 6] :

$$(x-1)^2(2x-11)=(x^2-2x+1)(2x-11)$$

$$(x-1)^2(2x-11)=2x^3-11x^2-4x^2+22x+2x-11$$

$$(x-1)^2(2x-11)=2x^3-15x^2+24x-11$$

$$(x-1)^2(2x-11)=f(x)$$

b) Pour tout réel x de $[0,6]$, les assertions suivantes sont équivalentes :

$f(x)=0$

$(x-1)^2(2x-11)=0$

$(x-1)^2=0$ ou $2x-11=0$

$x-1=0$ ou $2x=11$

$x=1$ ou $x=11/2$

Par conséquent :

$\boxed{\text{l'équation } f(x)=0 \text{ possède exactement deux solutions dans l'intervalle } [0,6] : 1 \text{ et } 11/2 .}$

c) $f(x)=(x-1)^2(2x-11)$

· $(x-1)^2$ est un polynôme du second degré qui s'annule en 1 et qui est strictement positif pour tout $x\neq 1$.

· $2x-11$ est un polynôme du 1er degré qui s'annule en 11/2.

· Dressons un tableau de signes:

x	0		1		11/2		6
$2x-11$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$(x-1)^2(2x-11)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Par conséquent :

$f(x)<0$ si et ssi $x\in[\,0\,;\,1\,[\,\cup\,]\,1\,;\,11/2\,[$

$f(x)>0$ si et ssi $x\in]\,11/2\,;\,6\,]$

$f(x)=0$ ssi $x=1$ ou $x=\dfrac{11}{2}$

3. a) f est une fonction polynôme définie sur $[0,6]$ donc dérivable sur $[0,6]$.

Pour tout réel x de [0 ; 6] :

$f'(x)=2\times 3x^2-15\times 2x+24$

$f'(x)=6x^2-30x+24$

$f'(x)=6\left(x^2-5x+4\right)$

$\boxed{f'(x)=6\,A(x)}$

b) $f'(x)=6\,A(x)$

Or 6>0 donc $f'(x)$ a le même signe que $A(x)$.

c) D'après la partie A, on a donc :

$f'(x)<0$ ssi $x\in]1,4[$

$f'(x)>0$ ssi $x\in[0,1[\cup]4,6]$

$f'(x)=0$ ssi $x=1$ ou $x=4$

On en déduit :

. Sur $[0,1]$, f est strictement croissante.
. Sur $[1,4]$, f est strictement décroissante.
. Sur $[4,6]$, f est strictement croissante.

4. Tableau de variation :

x	0		1		4		11/2		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0			$+$	
f	-11	$\nearrow$	0	$\searrow$	-27	$\nearrow$	0	$\nearrow$	25

5. Par lecture du tableau de variation de f, on peut dire :

$f(x)<0$ si et ssi $x\in[\,0\,;\,1\,[\,\cup\,]\,1\,;\,11/2\,[$

$f(x)>0$ si et ssi $x\in]\,11/2\,;\,6\,]$

$f(x)=0$ ssi $x=1$ ou $x=11/2$

Énoncé Exercice 7

L'objectif de cet exercice est d'étudier le signe de f(x) sur l'intervalle [0 ; 4] de deux façons différentes.

Soit f la fonction définie sur $[0,4]$ par :

$f(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$

Partie A

1. Vérifier que pour tout réel x de $[0,4]$,
$f(x) = (x-2)^2(x-3)$.

2. Étudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .

Partie B

1. Calculer $f(0)$ et $f(4)$.

2. Soit f' la fonction dérivée de f sur $[0,4]$.

a) Calculer $f'(x)$ en fonction de x .

b) Démontrer que $f'(x)$ admet deux racines distinctes : 2 et $\dfrac{8}{3}$.

c) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x .

d) En déduire le sens de variation de f .

3. a) Calculer $f(2)$ et $f(3)$.
On admettra que $f\left(\dfrac{8}{3}\right) = -\dfrac{4}{27}$.

b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0,4]$.
Placer $f(3)$ dans ce tableau.

c) Par lecture du tableau de variation, indiquer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .

CORRIGÉ

$f(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$

Partie A

1. Pour tout réel x de $[0,4]$:

$$(x-2)^2(x-3) = (x^2-4x+4)(x-3)$$
$$= x^3 - 4x^2 + 4x - 3x^2 + 12x - 12$$
$$= x^3 - 7x^2 + 16x - 12$$
$$= f(x)$$

Donc que pour tout réel x de $[0,4]$, on a bien :
$f(x) = (x-2)^2(x-3)$.

2. $f(x) = (x-2)^2(x-3)$

· $x-3$ est un polynôme du 1er degré qui s'annule en 3.

· $(x-2)^2$ est un polynôme du second degré qui s'annule en 2 et qui est strictement positif pour tout réel $x \neq 2$.

· Dressons un tableau de signes :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x-2)^2$		$+$	0	$+$	|	$+$	
$(x-2)^2(x-3)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Par conséquent :

$f(x) < 0$ si et ssi $x \in [\,0\,;\,2\,[\, \cup \,]\,2\,;\,3\,[$
$f(x) > 0$ si et ssi $x \in \,]\,3\,;\,4\,]$
$f(x) = 0$ si et ssi $x = 2$ ou $x = 3$

Partie B

$f(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$

1. . $f(0) = 0^3 - 7\times 0^2 + 16\times 0 - 12$

$\boxed{f(0) = -12}$

. $f(4) = 4^3 - 7\times 4^2 + 16\times 4 - 12$

$f(4) = 64 - 112 + 64 - 12$

$\boxed{f(4) = 4}$

2. a) f est une fonction polynôme définie sur $[\,0\,,4\,]$ donc dérivable sur $[\,0\,,4\,]$.

Pour tout réel x de [0 ; 4]:

$f'(x) = 3x^2 - 7\times 2x + 16\times 1 + 0$

$\boxed{f'(x) = 3x^2 - 14x + 16}$

b) $f'(x) = 3x^2 - 14x + 16$

$3x^2 - 14x + 16$ est un polynôme de degré 2.
Soit Δ son discriminant.

$\Delta = (-14)^2 - 4\times 3\times 16$

$\Delta = 196 - 192$

$\Delta = 4$

$\Delta > 0$ donc le polynôme $3x^2 - 14x + 16$ admet exactement deux racines x_1 et x_2 telles que :

$$x_1 = \frac{-(-14) - \sqrt{4}}{2\times 3} = \frac{12}{2\times 3} = 2$$

$$x_2 = \frac{-(-14) + \sqrt{4}}{2\times 3} = \frac{16}{2\times 3} = \frac{8}{3}$$

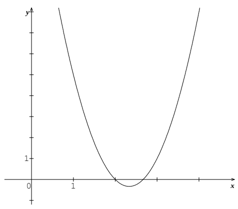
Donc $f'(x)$ admet bien deux racines distinctes : 2 et $\frac{8}{3}$.

c) $f'(x)$ admet deux racines distinctes: 2 et $\frac{8}{3}$.

Donc la parabole représentative de la fonction $x \mapsto 3x^2 - 14x + 16$ coupe l'axe des abscisses en exactement deux points, d'abscisses respectives 2 et $\frac{8}{3}$.

De plus le coefficient du terme x^2, égal à 3, est positif, donc la parabole est « tournée vers le haut ».

Cette parabole a l'allure suivante :



Par conséquent :

$f'(x) < 0$ ssi $x \in \left]\,2\,,\frac{8}{3}\right[$

$f'(x) > 0$ ssi

$x \in [\,0\,,2\,[\cup \left]\frac{8}{3},4\right]$

$f'(x) = 0$ ssi $x = 2$ ou $x = \frac{8}{3}$

d) De la question précédente, on déduit :

f est strictement croissante sur $[\,0\,,\ 2\,]$, strictement décroissante sur $\left[\,2\,,\frac{8}{3}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{8}{3},4\right]$.

3. a) $f(2) = (2-2)^2(2-3)$

$f(2) = 0\times(2-3)$

$\boxed{f(2) = 0}$

$f(3) = (3-2)^2(3-3)$

$f(3) = (3-2)^2\times 0$

$\boxed{f(3) = 0}$

<u>Remarque</u> : calcul de $f\left(\frac{8}{3}\right)$

(non demandé par l'énoncé)

$f\left(\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{8}{3} - 2\right)^2\left(\frac{8}{3} - 3\right)$

$f\left(\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{8}{3} - \frac{6}{3}\right)^2\left(\frac{8}{3} - \frac{9}{3}\right)$

$f\left(\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(-\frac{1}{3}\right)$

$f\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{4}{9}\times\frac{1}{3}$

$f\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{4}{27}$

b) Tableau de variation de f sur $[\,0\,,4\,]$:

x	0		2		$\frac{8}{3}$		3		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0			$+$	
f	-12	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{4}{27}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	4

c) Par lecture du tableau de variation de f , on peut dire :

$f(x) < 0$ si et ssi
$x \in [\,0\ ;\ 2\,[\cup]\,2\ ;\ 3\,[$

$f(x) > 0$ si et ssi
$x \in]\,3\ ;\ 4\,]$

$f(x) = 0$
si et ssi $x = 2$ ou $x = 3$

Énoncé Exercice 8

Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]3\,;\ +\infty[$ par :

$$h(x)=\frac{x^2-5x+4}{x-3} \quad .$$

Soit (C) la représentation graphique de la fonc-tion h dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. Étudier le sens de variation de la fonction h sur $]3\,;\ +\infty[$.
2. Dresser le tableau de variation de h sur $]3\,;\ +\infty[$.
3. Résoudre l'équation $h(x)=0$ dans $]3\,;\ +\infty[$.

   Déterminer une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 4.

CORRIGÉ

$$h(x)=\frac{x^2-5x+4}{x-3}$$

1. h est une fonction **rationnelle** définie sur $]3\,,\ +\infty[$, donc dérivable sur $]3\,,\ +\infty[$.

Pour tout réel de $]3\,;\ +\infty[$:

$$h'(x)=\frac{(2x-5)(x-3)-(x^2-5x+4)(1)}{(x-3)^2}$$

$$h'(x)=\frac{2x^2-6x-5x+15-x^2+5x-4}{(x-3)^2}$$

$$h'(x)=\frac{x^2-6x+11}{(x-3)^2}$$

Pour tout réel de $]3\,;\ +\infty[$: $(x-3)^2>0$, donc $h'(x)$ est du signe de $x^2-6x+11$.

$x^2-6x+11$ est un polynôme du second degré.

Soit Δ son discriminant.

$\Delta=(-6)^2-4\times1\times11$

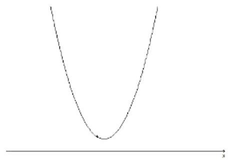
$\Delta=-8$

$\Delta<0$ donc le polynôme $x^2-6x+11$ n'admet pas de racine réelle.

Donc la parabole représentative de la fonction $x\mapsto x^2-6x+11$ n'a pas de point commun avec l'axe des abscisses.

De plus le coefficient du terme en x^2, égal à 1, est positif, donc la parabole est « tournée vers le haut ».

Cette parabole a l'allure suivante :



Donc $x^2-6x+11>0$ pour tout réel x .

Par conséquent :

$x^2-6x+11>0$ pour tout réel x de $]3\,;\ +\infty[$.

C'est-à-dire :

$h'(x)>0$ pour tout réel x de $]3\,;\ +\infty[$.

Par conséquent :

h est strictement croissante sur $]3\,;\ +\infty[$.

2. Tableau de variation de h sur $]3\,;\ +\infty[$

x		3	$+\infty$
$h'(x)$		$+$	
h		$\nearrow$	

3. Pour tout réel x de $]3\,;\ +\infty[$, l'équation $h(x)=0$ équivaut à

$$\frac{x^2-5x+4}{x-3}=0$$

$x^2-5x+4=0$ car $x\neq3$

x^2-5x+4 est un polynôme du second degré.

Soit Δ son discriminant.

$\Delta=(-5)^2-4\times1\times4=9$

$\Delta>0$ donc le polynôme $x^2-6x+11$ admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2 telles que :

$$x_1=\frac{-(-5)-\sqrt{9}}{2\times1}=1$$

et $$x_2=\frac{-(-5)+\sqrt{9}}{2\times1}=4$$

Or $1\notin\,]3\,;\ +\infty[$ et $4\in\,]3\,;\ +\infty[$.

Donc :

l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution dans $]3\,;\ +\infty[$: 4 .

4. La tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 4 a pour équation réduite :

$$y=h'(4)(x-4)+h(4)$$

- $h'(4)=\dfrac{4^2-6\times4+11}{(4-3)^2}=\dfrac{3}{1}=3$
- $h(4)=0$ d'après la question **3.**

Donc l'équation réduite équivaut à :

$y=3(x-4)+0$

$y=3x-12$

Par conséquent :

la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 4 a pour équation réduite : $y=3x-12$.