Énoncé

Partie A

1. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = 4 + u_n \end{cases}$ pour tout n de $\mathbb{N}$
Montrer que cette suite est arithmétique.

2. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = n^2 + n + 2$
Montrer que cette suite n'est pas arithmétique.

3. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = -2u_n + 3$
Montrer que cette suite n'est pas arithmétique.

4. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{6n+3}{3}$
Montrer que cette suite est arithmétique.

Partie B

1. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = 4u_n \times \frac{1}{3} \end{cases}$ pour tout n de $\mathbb{N}$
Montrer que cette suite est géométrique.

2. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = n^2 + n + 2$
Montrer que cette suite n'est pas géométrique.

3. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = -2u_n + 3$
Montrer que cette suite n'est pas géométrique.

4. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{5}{2^n}$
Montrer que cette suite est géométrique.

CORRIGÉ

Partie A

1. La suite est donnée sous forme récurrente.

Pour tout n de $\mathbb{N}$:

$u_{n+1} = 4 + u_n$

$u_{n+1} = u_n + 4$

Donc u_{n+1} est de la forme $u_n + r$ avec $r = 4$

Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est arithmétique de raison 4 (et de premier terme } -5).}$

2. La suite est donnée sous forme explicite.

$u_n = n^2 + n + 2$

. $u_0 = 0^2 + 0 + 2 = 2$
. $u_1 = 1^2 + 1 + 2 = 4$
. $u_2 = 2^2 + 2 + 2 = 8$

Donc :

. $u_1 - u_0 = 4 - 2 = 2$
. $u_2 - u_1 = 8 - 4 = 4$ Donc $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$

Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est pas arithmétique.}}$

3. La suite est donnée sous forme récurrente.

$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -2u_n + 3 \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} \end{cases}$

. $u_1 = -2u_0 + 3 = -2 \times 2 + 3 = -1$
. $u_2 = -2u_1 + 3 = -2 \times (-1) + 3 = 2 + 3 = 5$

Donc :

. $u_1 - u_0 = -1 - 2 = -3$
. $u_2 - u_1 = 5 - (-1) = 5 + 1 = 6$

Donc $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$

Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est pas arithmétique.}}$

4. La suite est donnée sous forme explicite.

Pour tout n de $\mathbb{N}$:

$u_n = \dfrac{6n+3}{3}$

$u_n = \dfrac{6n}{3} + \dfrac{3}{3}$

$u_n = 1 + 2n$

Donc u_n est de la forme $a + nr$
avec $a = 1$ et $r = 2$.

Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est arithmétique de raison 2 (et de premier terme 1).}}$

Partie B

1. La suite est donnée sous forme récurrente.

Pour tout n de $\mathbb{N}$:

$u_{n+1} = 4u_n \times \dfrac{1}{3}$

$u_{n+1} = \dfrac{4}{3} u_n$

Donc u_{n+1} est de la forme $q \times u_n$ avec $q = \dfrac{4}{3}$

Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est géométrique de raison } 4/3 \text{ (et de premier terme } -5).}$

2. La suite est donnée sous forme explicite.

$u_n = n^2 + n + 2$

. $u_0 = 0^2 + 0 + 2 = 2$
. $u_1 = 1^2 + 1 + 2 = 4$
. $u_2 = 2^2 + 2 + 2 = 8$
. $u_3 = 3^2 + 3 + 2 = 14$

Donc :

. $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{4}{2} = 2$
. $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{8}{4} = 2$
. $\dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{14}{8} = 1{,}75$

Donc $\dfrac{u_3}{u_2} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$

Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est pas géométrique.}}$

3. La suite est donnée sous forme récurrente.

$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -2u_n + 3 \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} \end{cases}$

. $u_1 = -2u_0 + 3 = -2 \times 2 + 3 = -1$
. $u_2 = -2u_1 + 3 = -2 \times (-1) + 3 = 2 + 3 = 5$

Donc :

. $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$
. $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{5}{-1} = -5$

Donc $\dfrac{u_2}{u_1} \neq \dfrac{u_1}{u_0}$

Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est pas géométrique.}}$

4. La suite est donnée sous forme explicite.

Pour tout n de $\mathbb{N}$:

$u_n = \dfrac{5}{2^n}$

$u_n = 5 \times \dfrac{1}{2^n}$

$u_n = 5 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

Donc u_n est de la forme $a \times q^n$
avec $a = 5$ et $r = 1/2$

Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est géométrique de raison } 1/2 \text{ (et de premier terme 5).}}$